Тема урока: Синус, косинус, тангенс и котангенс числа.

Повторение теоретического материала

Что такое прямой угол? (это угол в 90 градусов)

Что такое острый угол? (это угол от 0 до 90 градусов)

Что такое тупой угол? (это угол от 90 до 180 градусов)

Какой угол называется развернутым? (этот угол равен 180 градусов)

Изучение нового материала

Острый угол в прямоугольном треугольнике

Из курса геометрии известны определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла в прямоугольном треугольнике. Они даются как отношение сторон прямоугольного треугольника. Приведем их формулировки.

Опр: Синус острого угла в прямоугольном треугольнике – это отношение противолежащего катета к гипотенузе.

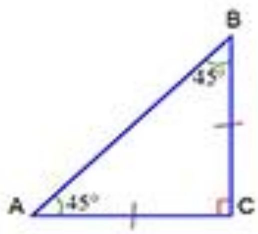
Опр: Косинус острого угла в прямоугольном треугольнике – это отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Опр: Тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике – это отношение противолежащего катета к прилежащему.

Опр: Котангенс острого угла в прямоугольном треугольнике – это отношение прилежащего катета к противолежащему.

Там же вводятся обозначения синуса, косинуса, тангенса и котангенса – **sin, cos, tg и ctg** соответственно.

Давайте найдем значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов 30°,45° и 60°.



$$AC = BC$$

$$\angle A = \angle B = 45°$$

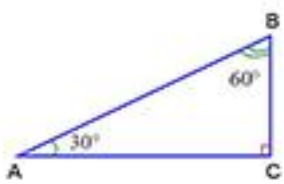
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2AC^2 = 2BC^2$$

$$AC = BC = \frac{AB}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 45° = \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg45° = tgA = \frac{BC}{AC} = 1$$



$\angle A = 30°$ $\angle B = 60°$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{BC}{AB} = \sin\ A = \sin\ 30°$$

$$\frac{BC}{AB} = \cos\ B = \cos\ 60°$$

$$\sin\ 30° = \frac{1}{2}, \qquad \cos\ 60° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \sqrt{1 - \sin^2 30°} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 60° = \sqrt{1 - \cos^2 60°} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad tg60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \sqrt{3}$$

Запишем все значения углов в таблицу:

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Предлагаю вам алгоритм, благодаря которому вы легко, в течение минуты восстановите в памяти все вышеуказанные значения:

1. Записываем в строчку углы от 0 до 90 градусов. Слева в столбик запишем сначала синус, затем косинус аргумента:

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					

2. Напротив синуса пишем числа от нуля до четырёх (под значениями углов). Напротив косинуса от 4 до 0:

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	1	2	3	4
$\cos\alpha$	4	3	2	1	0

3. Далее извлекаем корень:

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{0}$

4. Делим на 2:

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

5. Вычисляем:

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Мы получили значения синуса и косинуса углов от 0 до 90 градусов. Далее, зная формулы тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

вы сможете найти значения для указанных углов.

Например:

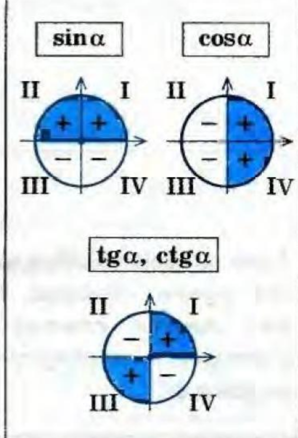
$$\operatorname{tg}30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{ctg}30° = \frac{\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α									
	град	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
	рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg}\alpha$		—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Знаки тригонометрических функций



Пример 1:

8.6. а) $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{tg}\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\mathrm{ctg}\, 30° = \sqrt{3}$;

б) $\sin 150° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{tg}\, 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\mathrm{ctg}\, 150° = -\sqrt{3}$;

в) $\sin 210° = -\frac{1}{2}$, $\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{tg}\, 210° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\mathrm{ctg}\, 210° \quad \sqrt{3}$;

г) $\sin 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 240° = -\frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\, 240° = \sqrt{3}$, $\mathrm{ctg}\, 240° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример 2: Пользуясь таблицей найти значение выражения:

$$3 \cdot \sin\frac{\pi}{6} + 2 \cdot \cos\pi + ctg^2\frac{\pi}{6} = 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (-1) + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \frac{3}{2} - 2 + 3 = 2{,}5$$

Пример 3:

$\sin\alpha = -0.8 \ \pi < \propto < \frac{3\pi}{2}$

Найдите: $\cos\propto$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$.

Решение.

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha$

$cos^2\alpha = 1 - (-0.8)^2 = 1 - 0.64 = 0.36$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{0.36} = \pm 0.6$

Так угол лежит в 3 четверти, то

$\cos\alpha = \ 0.6$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-0.8}{-0.6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$ctg\alpha = \frac{3}{4}$

Ответ: 0,6 ;$\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$.

Закрепление:

1. Вычислите значение выражения $\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \cdot \cos\frac{\pi}{6}$

2. Найдите значение функции $\sin\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$ если $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.